

マクスウェル方程式は衛星通信の基本 —その創出の背景と導出過程—

飯田尚志 編集顧問

1. はじめに

電磁気学の集大成であるマクスウェル方程式は、無線通信の基本中の基本であり、当然、衛星通信の基礎でもある。しかし、よく考えてみると、現在の学生には当てはまらないかもしれないが、1960年代後半の私が学生のときには、マクスウェル方程式は私にとって電磁気学及びアンテナ工学の講義の中で一連の数式演算として通過したにすぎず、マクスウェル方程式をその物理的意義を含めてきちんと学んだ覚えがない。どうもその原因としては、マクスウェル方程式は電磁気学教科書の最後に載っており、電磁気学の講義では時間的制約から簡単に済まされたこと、次のステップであるアンテナ及び電波伝搬に関連した講義ではマクスウェル方程式は習ったものとして進められたことからではないかと推察する。また、私にとっては、マクスウェル方程式は rot や div とかの面倒なベクトル演算の数式としてしか印象がなかった。

ところで、最近、工学部で数学が必要かという議論があるようである。しかし、数学は工学的創造の基になっており、特にマクスウェル方程式は代表格であるとして、米国工学アカデミーの床の大理石には同方程式のレリーフが彫り込まれているという[1]。図1は米国工学アカデミーの担当者から送って頂いた床に刻まれたレリーフの写真である。さらに、最近出版された本「世界を変えた17の方程式」[2][3]の中で、マクスウェル方程式は大きく扱われている。以上が、今回マクスウェル方程式の物理的意義も含めて勉強し直おすことにした動機である。そのため、参考文献は今では半世紀も前の古典的な文献を挙げることになったがお許し願いたい。

マクスウェルは、ファラデーの実験研究と理論を数学の方程式であるマクスウェル方程式として導出し、その当時の時代の科学技術を発展させただけでなく新たな世界を開いた。以下では、まず、マクスウェル方程式が作られた時代背景を述べた後、本題であるマクスウェル方程式の導出過程を述べる。次に、ヘルツの実験及びマルコーニの無線通信実験に言及した後、電磁気学の範疇ではないが、無線工学では必須のアンテナパターンの計算及び送信から受信までの信号伝達の計算式であるフリスの伝達公式を示す。以下で示す数式の誘導は教科書に従えば正確な追及が可能であるが、本資料の全項目を通した文献の手持ちがなかったので、以下では変数の用い方に一貫性のないところと数学的厳密さを少し犠牲としたところがあることをご容赦願いたい。

マクスウェル方程式なら任せてくれという程の専門家が多いと思われるが、そのような方にとっては何をいまさらと思われるかもしれない。本稿は新規なことは何もなく、従来の成果を辿ったに過ぎないので、そのような方は数式の導出のところはスキップして頂き、むしろ同方程式が創出された経緯や時代背景などを振り返るのも面白いと考えて頂ければ幸いである。さらに、以下の記述で間違い等があれば指摘して頂ければと思う次第である。

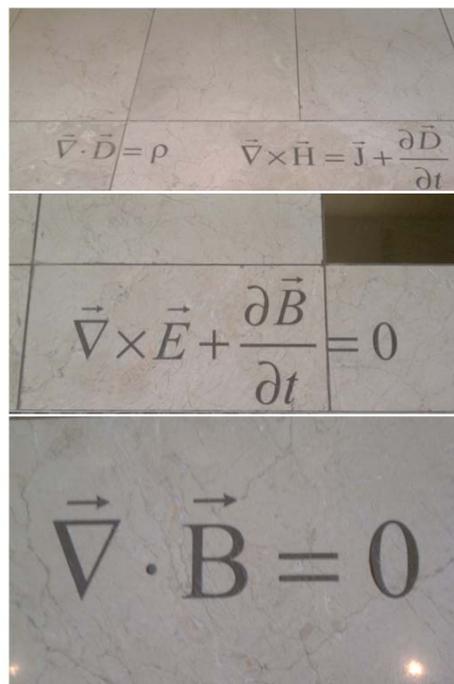


図1 Maxwell's equations carved into the floor of the National Academies Keck Center lobby (同センター Maribeth Keitz 氏から送って頂いたもの)

2. マクスウェル方程式誕生の時代背景

本題に入る前に、マクスウェルの研究のきっかけを作ったファラデーについてどういう人物なのか調べたい。そのためまず、マクスウェル方程式誕生の時代はどのような時代だったのか調べたい。その時期は18世紀から19世紀初めにかけての時代であるが、偉大な科学者が続出しており目を見張る思いである。

古くから遠隔作用として磁石が知られており、興味の対象であるとともに魔法の道具としても関心が持たれてきた。この点に関しては、文献[4]の山本義隆著「磁力と重力の発見」全3巻に詳しいが、その最後に次のように記述されている。「これでもって、磁力と重力の前科学史をめぐるこの長い物語は終る。やがてニュートンとクーロンの遠隔力の概念がファラデーからアインシュタインにいたる過程であらためて問い直されることになるが、それはこの後の話である。」とある。つまり、ここで扱うマクスウェル方程式は正に「この後の話」である。

2.1 偉大な科学者輩出の世紀

マクスウェルの生きた時代は19世紀中頃であるが、この時代は産業革命が起こり、科学技術が著しく発展した時代であり、同時に科学技術を発展させた数多くの天才が輩出しており驚かされる。その天才達の生きた時代を生年順に図2に示す。図2の中で、オイラーから始まり、ラプラス、ガウス、ベッセル、ストークス、ヘヴィサイド、ローレンツなどの数学者はその名を冠した公式として有名であるが、マクスウェル方程式導出の過程ではほとんどすべて使われている。電磁気学の発展の本流には、クーロン、ビオ、サバル、アンペール、エルステッド、ファラデー、マクスウェル、ヘルツ、マルコーニと続く。そして、アインシュタインの業績へと繋がっていった。

図2では参考のため、ニュートン、ワット、エジソンも示してあるが、ニュートンは重力の方程式から始まる遠隔作用を開始し、ワットは正に18世紀半ばに始まった産業革命の中心である蒸気機関を実用化し、エジソンは電灯の利用を推し進め、19世紀終盤には電気照明の利用が開始された。

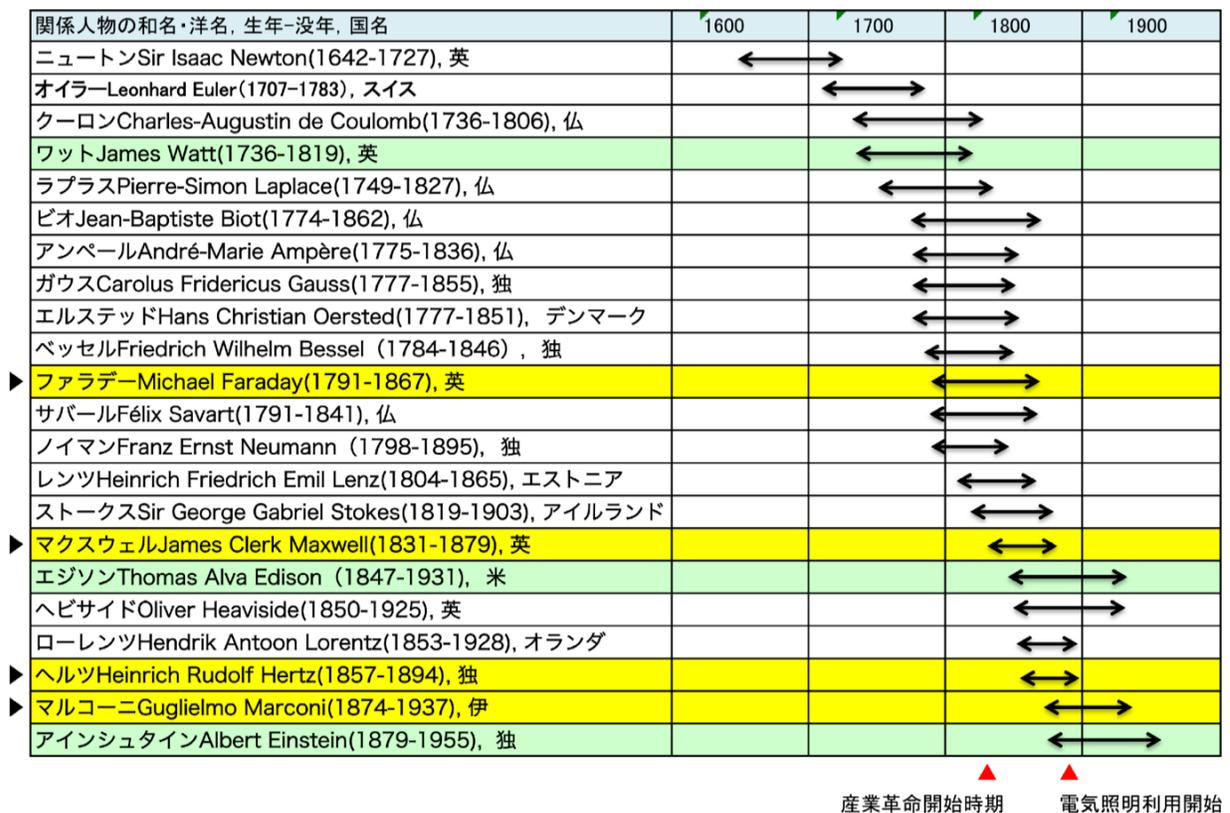


図2 マクスウェル方程式の時代背景

以下では図2の左端に▶印をつけたとおりファラデー、マクスウェル、ヘルツ、マルコーニの業績に注意を向けることとするが、まず、前2者について背景を調べることにする。

2.2 ファラデー[5]

電磁気学の新しい局面を切り開いたのはファラデー(Michael Faraday, 1791-1867) (図3参照)である。彼はイギリスの鍛冶職人の子として生まれ、書店兼製本業の店に徒弟奉公していたが、王立協会の公開講座を聞き、自然科学の仕事を懇願し、1813年、王立協会化学者H・デーヴィーの実験室助手に採用された。当時の王立協会は、有用な機械的発明の知識を広め、一般への導入を可能にすることを使命とし、公開講座などを実施していたため、ファラデーのような才能を研究に引き込んだものと思われる。我が国の独立行政法人研究機構も見習うべきものかもしれない。

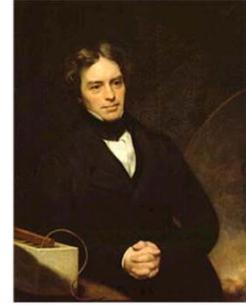


図3 ファラデー

ファラデーは直流電流の周囲の磁場を研究し、電磁場の基礎理論を確立し、電磁気を利用して回転する装置(電動機)を発明、その後の電動機技術の基礎を築いた。アノード電極、カソード電極といった用語の創造や、国際単位系(SI)の単位「ファラッド(F)」はファラデーに因んでいる。

ファラデーは、他の科学者たちが電磁気現象を力学における遠隔力と考えていたのに対して、空間における電気力線・磁力線という近接作用的概念[6]をもって研究した。空芯のコイルの中で磁石を動かしても電流が流れること、また、磁石を固定して導線の方を動かしても電流が流れることを発見し、これらの実験で、磁場の変化によって電場が生ずることを示した。このファラデーの電磁誘導の法則は、後にマクスウェルが数理モデル化し、4つのマクスウェルの方程式の1つとなり、さらに一般化され、場の理論となっている。

一方、ファラデーは高等教育を受けておらず、高度な数学もほとんど知らなかったが、史上最も影響を及ぼした科学者の1人とされ、王立協会の初代フラ教授職に就いた。

2.3 マクスウェル[7]

マクスウェル(James Clerk Maxwell, 1831-1879) (図4参照)の父親はイギリスの領主で弁護士であった。1841年、エジンバラ・アカデミーに入学。産業革命の波によって設立されたこのような学会では、実業家、法律家、技術者、科学者、芸術家たちが自由な討論を行っていた。1846年、15歳で「卵形曲線の特質と多焦点曲線について」という処女論文を発表した。この論文によりマクスウェルはエジンバラ大学入学を許可されるが、父親の「16歳まで待つように」との助言に従い入学を見送る。



図4 マクスウェル

1847年、エジンバラ大学入学。1850年、ケンブリッジ大学在籍中、ファラデーの電磁気現象の研究に着目し研究を開始した。1856年、「ファラデー力線について」の論文で、ファラデーがいう電気力線、磁力線の力線を流体の流線に置き換え、電磁誘導で発生する誘導起電力は磁束の時間的変化であるとして数学的に表現した。当時、大西洋横断ケーブルが敷設されるなど、資本主義経済の発展の下、電気技術が飛躍的に成長する時代に、統一的な理論が要求されていた。

1861年、「物理的力線について」の論文で、誘電体のように電流が流れていなくても微粒子の変位により電流を生ずるという変位電流の概念を創造した。どうも難解で理解されなかったらしいが、1864年、「電磁場の動力学的理論」でマクスウェルの基本方程式を導いた。1873年、「電気磁気論」を著し、電磁波が存在しその伝播速度は光の速度に等しいことを示した。このことが後のアインシュタインの相対性理論に繋がって行った

このようにマクスウェル方程式は単独に突然出現したものではなく、むしろ産業革命による科学技術の発展と電気技術の飛躍による要請という時代精神に則って出現したものであると言える。

3. マクスウェル方程式[8-12]

マクスウェル方程式は、図1と同様の書式を使えば、式(1), (2), (3), (4)のようになる。

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 \mathbf{E} ：電場、 \mathbf{H} ：磁場、 \mathbf{D} ：電束密度、 \mathbf{B} ：磁束密度、 \mathbf{J} ：電流面密度、 ρ ：電荷体積密度である。ベクトル演算に関しては、後で使うものも含めて示すと、 $\nabla \times$ は rot、 $\nabla \cdot$ は div、 ∇ は grad を表わす。 ∇ はナブラと呼ぶ。また、 $\nabla \cdot \nabla$ (div(grad)) は ∇^2 と表して、ラプラシアンと呼ぶ。これらは、式(5)及び(6)で示される。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\nabla \cdot \nabla = \text{div}(\text{grad}) = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ベクトル演算は慣れないと取り付き難いがそのまま受け入れて進むこととし、以下では、マクスウェル方程式の導出を行う。その導出過程は次の4段階になる。

- 第1段階 電荷が作る静電場：微分型ガウスの法則
- 第2段階 電流の周りに発生する磁場：ビオ・サバールの法則
- 第3段階 磁場により発生する電流：ファラデーの電磁誘導の法則
- 最終段階 マクスウェルによる変位電流の導入：マクスウェル方程式の完成

3.1 第1段階：電荷が作る静電場

クーロンの法則(1785年)：距離 r だけ離れた2つの電荷 q_1, q_2 に互いに働く力 F は、図5のような装置により測定され、式(7)で与えられる。

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{|r|^3} \quad \dots\dots\dots (7)$$

但し、 ϵ_0 は真空誘電率である。これを q_1, q_2 が互いに及ぼす力が働く(遠隔作用)のではなく、次に示すように、 q_1 によって作られる電場 E (式(9)) によって q_2 に生ずる力(式(8)) と解釈する(近接作用)。これは、2.2 に述べたように、ファラデーの独創によるといわれる。その媒体は不明であるが、何かある筈という考えがエーテルが存在する筈という考えに発展していった。

$$F = q_2 E \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{|r|^3} \quad \dots\dots\dots (9)$$

簡単のために、電荷 q を半径 r の球で取り囲むことを考える。積分型ガウスの法則により電荷 q から出る電場の q を取り囲む面での合計は q に等しいから、 \mathbf{n} を法線方向の単位ベクトルとして、

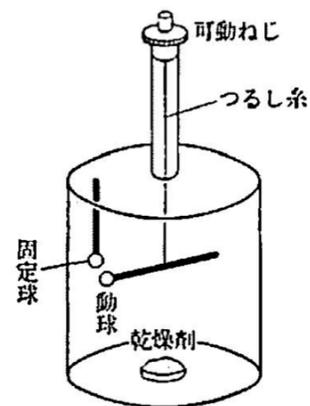


図5 クーロン力の測定[7]

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \dots (10)$$

ガウスの定理（閉じた面の表面の積分を閉じた面を取り囲まれた全体積についての積分に変換）により式(11)のようになる。

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int \nabla \cdot \mathbf{E} dV \dots (11)$$

式(10)と式(11)を比べることにより式(12)を得る。これを微分型ガウスの法則と呼ぶ。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \dots (12)$$

誘電率は電束密度 \mathbf{D} と電界の強さ \mathbf{E} との比として定義されるから[9]、真空中においては、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \dots (13)$$

式(13)の両辺の div をとり、式(12)と比較することにより

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \dots (14)$$

を得る。式(14)はマクスウェル方程式の第 3 式である。

3.2 第 2 段階：電流の周りに発生する磁場

電荷の流れとしての直流電流の周囲に電流の進行方向に対して右回りの磁場 \mathbf{B} （磁束密度）が発生する。そこで、任意の形をした線状導線を通る電流による磁場の磁束密度を求めるには、その電流を微小な電流素片 $J ds$ に分けて、それぞれの電流素片による磁束密度を足し合わせればよいが、電流は、電荷と異なり、長いつながりのあるものであり、その一部分だけを取り出してその作用を分離して調べることは一般に難しい。これを解決したのはビオとサバルで、両研究者はこの困難を巧みな工夫によって克服して電流素片による磁束密度に関する実験則を見出した。導線上の微小な長さ ds を流れる電流 J が距離 r だけ離れた点に作り出す微小な磁場である磁束密度 $d\mathbf{B}$ の大きさは（ビオ・サバルの法則、1820 年）、

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J ds \times \mathbf{r}}{r^3} \dots (15)$$

但し、 μ_0 は真空透磁率である。式(15)から \mathbf{B} を求めるために、次の計算テクニックを用いる。即ち、式(16)を満たすようなベクトル \mathbf{A} を導入する。この \mathbf{A} をベクトルポテンシャルと呼ぶ。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \dots (16)$$

計算過程は省略する（詳細は例えば文献[8]参照）が、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、定常電流の場合、電流密度を用いた式(17)のような表現に定めることができる。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{r}|} dV \dots (17)$$

ここで、任意のベクトル \mathbf{X} に対し、

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{X} = 0 \dots (18)$$

であるので、式(16)両辺の div をとれば、式(19)となる。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \dots (19)$$

式(19)はマクスウェル方程式の第 4 式である。

次に $\nabla \times \mathbf{B}$ の計算を行う。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{X} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{X} - \nabla^2 \mathbf{X} \dots (20)$$

であるので、 $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \dots (21)$

これを計算すれば（計算過程は認めるとして）、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \dots\dots\dots (22)$$

式(22)は、電流密度が存在するとその周りに微小な右回り磁場が生ずることを表している（微分形アンペールの法則）。但し、上記ベクトルポテンシャルを表現したときの条件に示したように、右辺は時間的に変動しない定常電流の場合のみを考えていることに注意（問題点は3.4に述べる）。さらに、電場と同様に、透磁率は磁束密度 \mathbf{B} と磁場の強さ \mathbf{H} との比として定義されるから[9]、真空中においては、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \dots\dots\dots (23)$$

式(23)の両辺の rot をとり、式(22)と比較することにより、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \dots\dots\dots (24)$$

を得る。式(24)はマクスウェル方程式の第2式に相当する。

3.3 第3段階：磁場により発生する電流

第3段階で扱うのは、電流で磁気が発生するならばその逆もあるはずというファラデーの着想（1821年）に基づいている。また、レンツの法則によれば、電磁誘導によって生ずる起電力は磁束変化を妨げる向きの電流を生ずる。さらに、ノイマンの法則により、1つの回路と鎖交している磁束数（コイルを貫く磁力線の数）が変化しつつある場合には、鎖交磁束数の減少の割合に等しい起電力を生ずる。

生ずる起電力を ϕ とすれば、

$$\phi = -\frac{d\Phi}{dt} \dots\dots\dots (25)$$

但し、 Φ は1つの回路と鎖交する全磁束数、 $-d\Phi/dt$ は鎖交磁束数減少の割合を示す。

起電力 ϕ はコイルの道筋に沿って電場を線積分することによって得られるから、

$$\phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots\dots\dots (26)$$

コイルの内側を通る磁束はコイルの道筋を縁とする面について積分することで表せる

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \dots\dots\dots (27)$$

式(25)の左辺に式(26)、右辺に式(27)を適用すれば、

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \left(\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \right) \dots\dots\dots (28)$$

ストークスの定理を応用して、ベクトルの線積分を面積分に変換（ $d\mathbf{s}$ から dS に）すると、式(28)は、

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \dots\dots\dots (29)$$

式(29)より、式(30)が得られる。これはファラデーの誘導法則と呼ばれる式である。

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

式(30)はマクスウェル方程式の第1式である。

3.4 最終段階：変位電流の導入

3.1 から 3.3 までに得られた式(30)、(24)、(14)、(19)をまとめて書くと、

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \dots (31)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \dots (32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \dots (33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots (34)$$

上の4つの式はマクスウェルの方程式に完全には一致していない。その理由は、電流の周りに発生する磁場において求めた式(32)の $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ に問題があるからである。何故なら、式(32)の両辺についてdivを計算すれば、

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \dots (35)$$

を得る。これは定常状態では正しいが、一般に空間における電荷密度が時間とともに変化するときには正しくない。変化を起こさせる原因として例えば、コンデンサに貯め込まれた電荷は電線で逃げ道を作ってやれば電位の低い方へ流れていく。この場合には、電流は電荷が蓄積されているところを源として生じ、電流が流れていくに従って蓄積されていた電荷は減少していくから、任意の点における電荷不減の条件より

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \dots (36)$$

が成立すべきである。このことを反映させるために次のことを行う[8]。まず、式(33)の両辺を微分すると、

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \dots (37)$$

となるが、これに式(36)を用いると、

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) = 0 \quad \dots (38)$$

が得られる。式(38)では $\partial \mathbf{D} / \partial t$ が電流密度 \mathbf{J} と同様な形で入っていることがわかる。それで、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ という量も通常の電流と同じように磁場を作る働きを持っていると考え、式(32)の右辺に代入すれば、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \dots (39)$$

という形になる。式(37)はマクスウェル方程式の第2式である。この式を「アンペール・マクスウェルの法則」と呼ぶ。 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ の意味は、これまで電流が磁場を作り出し、磁場の変化が電場を生み出すことを見てきたが、(定常)電流がなくとも電場だけで磁場を発生させることが出来る可能性が示された。この量 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ は、「変位電流」と呼ばれ、マクスウェルの発想であるが、これによりマクスウェルは方程式を完全なものとし、これによって電磁波の伝搬など豊富な古典電磁気学の体系ができあがった[10]。

$\partial \mathbf{D} / \partial t$ を一つの電流とみなすことは、磁場をビオ・サバールの法則から与えないで、 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ という関係を当てはめようとしたことから起ったことであり、これは場の考えを完全にまとめ上げるために、必然的に要求されたものである。しかし、これは全く一つの仮説であって、実験によって実証されなければ、確かだと言うことはできない。それには、この項を入れたことによって初めてあらわれる効果を見つけて、それを実験的に検証すること以外はない。そのような現象の典型的なものは電磁波である。ある場所の電場の変化は変位電流を生じてそれによる磁場を生じ、その磁束の変化はまた誘導起電力による電場を生じ、こうして作用が次々に伝わって行くのが電磁波であり、これは、比較的遠方まで電磁場のエネルギーを発散させるに都合がよい。このような電磁波はヘルツによって実証された。これが電磁場説の遠隔作用説に対する決定的勝利であった[8]。

4. ヘルツの実験[13]

ドイツの物理学者ヘルツ（Heinrich Rudolf Hertz, 1857- 1894）（図 6 参照）は、マクスウェルの電磁気理論をさらに明確化し発展させ、1888年に電磁波の放射の存在を、図 7 のような電磁波を生成・検出する機械を製作し 12m の距離の実験によって実証した。



図 6 ヘルツ

ヘルツは自分の実験の実用的価値を理解していなかったという。「それは何の役にも立っていない……単にマクスウェル先生が正しかったことを証明しただけの実験だ。」その発見の今後について聞かれると、ヘルツは「たぶん、何もない」と答えたという。

ただ、こう書くとヘルツは単に実験しただけのように見えるが、電場の強さが距離に反比例して弱まっていくことを観測し、紫外線が当たると電荷が失われることに注目した光電効果の確立に寄与した。また、電磁波は横波で有限な速度（光速）で伝わり、いろいろな物質中を伝わることを、反射、屈折、偏り等光と同じ性質を持っていることを確認した。さらに、7. に述べるようにマクスウェル方程式をすっきりした形に整えるなどの貢献を行った。

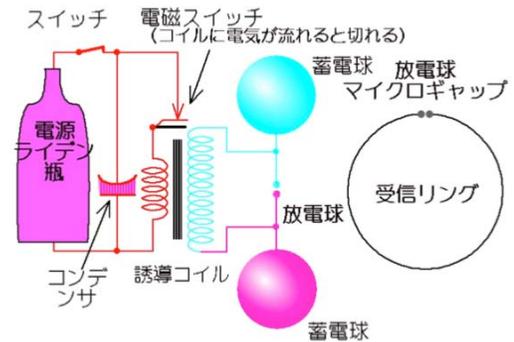


図 7 ヘルツの実験装置[14]

5. マルコーニによる無線通信の実用化[15]

マルコーニ（Guglielmo Marconi, 1874-1937）（図 8 参照）は、1895年、世界で初めて無線通信に成功した。彼の実験装置はボローニア市の南方 15km にある図 9 に示すマルコーニ博物館（彼の生家）に展示されている。その実験装置は図 10 に示すようなもので、送受信機は出来合いのもので、受信検波器にはコヒーラ検波器を使用したものであったが、アンテナの使用と接地の実施がマルコーニの独自開発であり、これにより無線通信距離を伸ばし、図 11 のような丘越え 1.5km の距離の通信に成功した。



図 8 マルコーニ

彼の成果は当時イタリアでは評価されず、むしろ英国が買ったため、母親の国である英国にわたり、以後の発展の基礎を作っていた。彼の実験を続け、その成果が世に受け入れられていった理由は、彼の家が裕福であったということが第 1 条件であるが、両親が彼の実験を熱心に支えてくれたことが大きいという[16]。マルコーニは、1909年にノーベル物理学賞を受賞した。



図 9 マルコーニ博物館



図 10 無線実験装置



図 11 無線実験を行ったフィールド

6. マクスウェル方程式から波動方程式の導出[8-12][17]

電波の問題では電磁界を

$$E = |E| \cos(\omega t + \phi) \dots\dots\dots (40)$$

と表し、これをオイラーの公式

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x \dots\dots\dots (41)$$

より、

$$\mathbf{E} = |\mathbf{E}| e^{j\omega t} \dots\dots\dots (42)$$

と表すと、 $\partial/\partial t$ は $j\omega$ で置き換えられる[18]。

マクスウェル方程式第1式(式(1)), 第2式(式(2))と $B=\mu H$, $D=\epsilon E$ から

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = 0 \dots\dots\dots (43)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - j\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \dots\dots\dots (44)$$

上記式(43)の両辺の rot をとり、式(44)を使って \mathbf{H} を消去すると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} \dots\dots\dots (45)$$

但し、

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \dots\dots\dots (46)$$

また、上記式(44)の両辺の rot をとり、式(43)を使って \mathbf{E} を消去すると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} \dots\dots\dots (47)$$

式(20)を使ってマクスウェル方程式第3式(式(3)), 第4式(式(4))を考慮すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \dots\dots\dots (48) \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} \dots\dots\dots (49) \end{array} \right.$$

ここで、電流源や電荷のない点では

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \dots\dots\dots (50) \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \dots\dots\dots (51) \end{array} \right.$$

となる。これは波動方程式と呼ばれる。

7. 平面波の電磁界[17][19]

平面波とは、波の位相が一致している面(波面)が平面である波である。一般に、電流源 \mathbf{J} を与え、電磁界 \mathbf{E} , \mathbf{H} を求めるには、図12のように、直接積分するより、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} またはヘルツベクトル $\mathbf{\Pi}$ を使う経路で求める[19]。

次の偏微分方程式を満足するベクトル関数 \mathbf{A} ,

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \dots\dots\dots (52)$$

さらに、

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{A}}{j\omega\epsilon\mu} \dots\dots\dots (53)$$

をヘルツベクトルと名付け、次式を満足する $\mathbf{\Pi}$ を求める。

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{\Pi} + k^2 \mathbf{\Pi} = j\mathbf{J}/\omega\epsilon \dots\dots\dots (54)$$

平面波の場合は有限な所に電流源はないものと考えられるから $\mathbf{J}=0$ とおける。この場合、電磁界の解は、

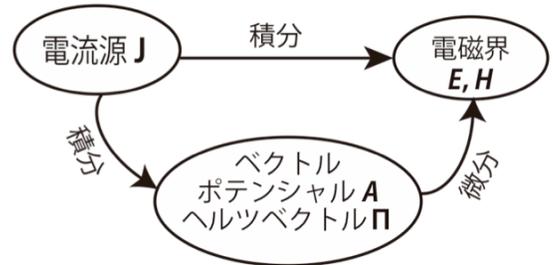


図12 電磁界の求め方[19]

$$\begin{cases} E_x = E_0 e^{-jkz} & \dots\dots\dots (55) \\ H_y = H_0 e^{-jkz} & \dots\dots\dots (56) \\ E_y = E_z = H_x = H_z = 0 & \dots\dots\dots (57) \end{cases}$$

となる。電磁波は電場と磁場が相伴った波であり、先述のように、変位電流導入の結果得られたマクスウェル方程式の重要な結論である。ここで、 E_x ,

H_y の瞬時値 E_{xt} , H_{yt} を求めると、

$$E_{xt} = \sqrt{2} |E_0| \cos(\omega t + \theta - kz) \dots\dots\dots (58)$$

$$H_{yt} = \sqrt{2} |H_0| \cos(\omega t + \theta - kz) \dots\dots\dots (59)$$

となり、図 13 のようになる。但し、図中、 λ は波長を表す。

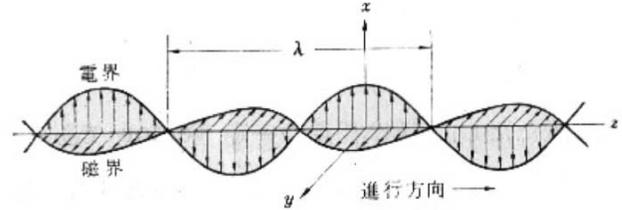


図 13 平面波の瞬時値

8. マクスウェル方程式から特殊相対性理論へ[8][9][20]

平面波の伝搬速度は次のように求める。即ち、 E_x , H_y の瞬時値 E_{xt} , H_{yt} の表現において、 $\omega t + \theta - kz$ が一定の点では電界や磁界は一定である。そのような点は時間とともに z 方向に移動し、その速度 v は

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \dots\dots\dots (60)$$

この速度は真空中では式(61)に示すように光速に等しい。電磁波の速度が光速に等しいという発見は特殊相対性理論への発展した。

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{(8.855 \times 10^{-12} [F/m \equiv As/V/m]) \times (4\pi \times 10^{-7} [H/m \equiv Vs/A/m])}} = 2.996 \times 10^8 [m/s] \dots\dots\dots (61)$$

ここで、As/V/m: アンペア・秒/ボルト/メートル, Vs/A/m: ボルト・秒/アンペア/メートルを表す。

1873 年のマクスウェル自身の原著教科書『電気磁気論』では、電磁ポテンシャルの入った式であったが、1884 年に、ヘヴィサイド[21]によりベクトル解析の記法を適用して現在の見やすい形に書き改められた。さらに、1890 年になってヘルツが改めて理論構成を考察し、電磁ポテンシャルを消去したものを示した。これらにより方程式系に整理されたことから、電場と磁場の統一（電磁場）、光が電磁波であることなどが導かれた。19 世紀後半を通じて物理学者の大半は、マクスウェルの方程式において光速度が全ての観測者に対して不変であるという奇妙な予測のために、またそれがニュートン力学の運動法則と矛盾したために、これらの方程式が電磁場への近似的なものに過ぎないと考えた。しかし、1905 年にアインシュタインが特殊相対性理論を提出したことによって、マクスウェルの方程式が正確で、ニュートン力学の方を修正すべきだったことが明確になった。後年、アインシュタインは特殊相対性理論の起源はマクスウェルの電磁場方程式である旨明言している。

9. 十分遠方における電磁界[17][22]

損失のない媒質中に電流源 J_0 と磁流源 J_{0m} があった場合、それらによって誘導される電磁界を求める。この場合、ヘルツベクトル Π , Π_m は

$$\begin{cases} \nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = \frac{jJ_0}{\omega\epsilon} & \dots\dots\dots (62) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \Pi_m + k^2 \Pi_m = \frac{jJ_{0m}}{\omega\mu} & \dots\dots\dots (63) \end{cases}$$

これらの式の解は次式で与えられる

$$\left\{ \begin{aligned} \Pi(x, y, z) &= \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon} \int_V J_0(x', y', z') \frac{e^{-jkr}}{r} dv \dots\dots\dots (64) \\ \Pi_m(x, y, z) &= \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon} \int_V J_{0m}(x', y', z') \frac{e^{-jkr}}{r} dv \dots\dots\dots (65) \end{aligned} \right.$$

これを計算して、電界、磁界を求めると

$$\left\{ \begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ -j\omega\mu J_0 \frac{e^{-jkr}}{r} - J_{0m} \times \nabla' \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right\} dv \dots\dots\dots (66) \\ H(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ -j\omega\epsilon J_{0m} \frac{e^{-jkr}}{r} + J_0 \times \nabla' \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla' \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right\} dv \dots\dots\dots (67) \end{aligned} \right.$$

但し、 ∇' は (x', y', z') に対する微分を表し、 r は

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \dots\dots\dots (68)$$

ここで、電流源・磁流源が空間の一部分だけに限定されて分布している場合、そこから十分離れた遠方の点に生ずる電磁界を考えると、電磁界は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} E &\approx \frac{e^{-jkR}}{R} D \dots\dots\dots (69) \\ H &\approx \frac{1}{Z_0} \frac{e^{-jkR}}{R} R_0 \times D \dots\dots\dots (70) \end{aligned} \right.$$

但し、ここで D は電束密度ではなく、以下の定義によることに注意。

$$\left\{ \begin{aligned} D &= (R_0 \times D_1 + Z_0 D_{1m}) \times R_0 \dots\dots\dots (71) \\ Z_0 &= \sqrt{\mu/\epsilon} \dots\dots\dots (72) \end{aligned} \right.$$

但し、

$$\left\{ \begin{aligned} D_1 &= -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_V J_0 e^{jk\xi \cos\gamma} dv \dots\dots\dots (73) \\ D_{1m} &= -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_V J_{0m} e^{jk\xi \cos\gamma} dv \dots\dots\dots (74) \end{aligned} \right.$$

ここで、 ξ, r は e^{-jkr}/r を R を含む式に展開するために導入した変数である[17]。

極座標の原点付近に置かれた任意のアンテナによって十分遠方に放射される電磁界は、式(69), (70)で表されるが、電界だけを再掲すると

$$E(R, \theta, \phi) \approx \frac{e^{-jkR}}{R} D(\theta, \phi) \dots\dots\dots (75)$$

ここで、 $D(\theta, \phi)$ を指向性係数といい、その形を図示したものを放射パターンという。式(75)は、十分遠方に放射される電界は距離 R の一乗に反比例して減衰するに過ぎないことを表しており、このことは電波が非常に遠方まで伝搬することを保証しているものである。

9.1 放射パターンの例：微小ダイポール[17]

図 14 に示すように、長さ l の微小ダイポールによる電磁界を求める。電荷 q と電流 i との関係は

$$i = \frac{\partial q}{\partial t} \dots\dots\dots (76)$$

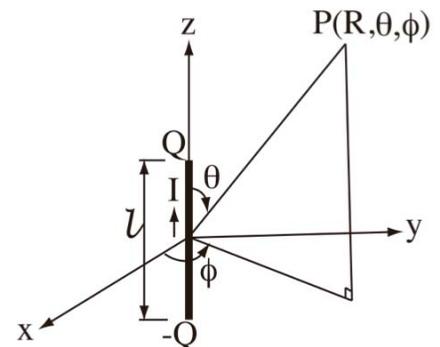


図 14 微小ダイポール

であるので、ダイポールにおける電荷が角周波数 ω の正弦波振動をしているとき、電流と電荷の最大値を I 、 Q とすれば、式(42)と同様に

$$\begin{cases} q = Qe^{j\omega t} & \dots\dots\dots (77) \\ i = Ie^{j\omega t} & \dots\dots\dots (78) \end{cases}$$

これらを式(76)に適用すると、式(79)を得る。

$$I = j\omega Q \dots\dots\dots (79)$$

この場合のヘルツベクトルは、

$$\Pi_z(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{e^{jkR}}{R} \dots\dots\dots (80)$$

但し、
$$\begin{cases} p = Ql & \dots\dots\dots (81) \\ R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \dots\dots\dots (82) \end{cases}$$

この解には $1/R$ 、 $1/R^2$ 、 $1/R^3$ を含むものが得られるが、十分遠方での放射電磁界は p の代わりに l で表し、 $kR \gg 1$ とすると、

$$E_\theta = jkIl \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{-jkR}}{R} \sin\theta \dots\dots (83)$$

$$H_\phi = \frac{jkIl}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \sin\theta \dots\dots\dots (84)$$

真空中では式(61)の ϵ_0, μ_0 の値を用いると、

$$\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 30 \dots\dots\dots (85)$$

となる。また、式(46)の k において、式(61)で光速 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ であるので、 λ を波長とすると、

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \dots\dots\dots (86)$$

となることを考慮すると、式(83)は次のようになる。

$$E_\theta \approx j60\pi Il \frac{e^{-jkR}}{\lambda R} \sin\theta \quad [V/m] \quad (kR \gg 1) \dots\dots (87)$$

電界の放射パターン例を、次の Mathematica プログラムにより計算すると、**図 15** のようになる。

Mathematica プログラム

```
f = RevolutionPlot3D[{Sin[t]}, {t, 0, 2π}, {q, -0.75 π, 0.75 π}, Mesh -> 50];
Show[f, Boxed False, Axes -> None, Lighting -> "Neutral"]
```

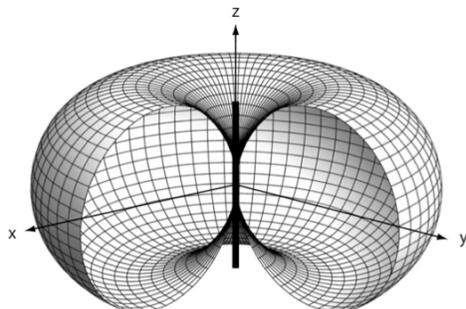


図 15 微小ダイポール放射パターン

9.2 放射パターンの例：パラボラアンテナ[23]

図 16 に示す間隔 d の均一分布リニアアレーの放射パターンは(ブロードサイドアレーのときを示す)

$$D(\theta) = 1 + e^{jkd \cos \theta} + e^{jk2d \cos \theta} + \dots + e^{jk(n-1)d \cos \theta}$$

$$= \sum_s^{n-1} e^{jskd \cos \theta} = \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{\lambda} \cos \theta\right)}{n \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \cos \theta\right)} \dots \dots \dots (88)$$

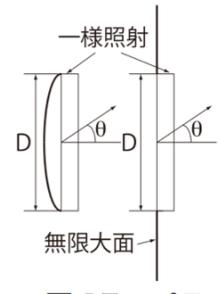
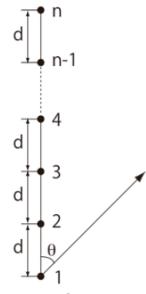


図 16 リニアアレー

図 17 パラボラアンテナ

開口直径 D のパラボラアンテナの場合は、
 図 17 に示すように、一様照射のアレーが無限大面に並んでいると考え、ホイヘンスの原理を応用して、指向係数 D(θ)は次式となる(詳しくは文献[23]参照)。

$$D(\theta) = \frac{2\lambda}{\pi D} \frac{J_1\left[\left(\frac{\pi D}{\lambda}\right) \sin \theta\right]}{\sin \theta} \dots \dots (89)$$

但し、J₁は第1種ベッセル関数である。
 パラボラアンテナの放射パターン例を、次の Mathematica プログラムにより計算すると、図 18 のようになる。

Mathematica プログラム

```
h1 = 7; h2 = Sin[θ]; h3 = 0.11; g = (BesselJ[1, Sin[h1*h2]]/(h1*h2)); f = ParametricPlot3D[{g*Sin[θ] Cos[φ], g*Sin[θ] Sin[φ], g}, {θ, -π/2, π/2}, {φ, 0, π}, Boxed -> False, Axes -> False, Ticks -> None, Lighting -> "Neutral", Mesh -> 10]; Show[f, PlotRange -> {{h3, -h3}, {h3, -h3}, {-0.1, 1}}]
```

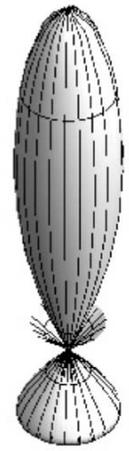


図 18 パラボラアンテナ

10. フリスの伝達公式[17]

最後に、frisの公式を導く。十分遠方の電磁界による電力密度は、式(72), (83)を使って、

$$P(R, \theta, \phi) = \frac{|E(R, \theta, \phi)|^2}{Z_0} \dots \dots \dots (90)$$

このときアンテナからの放射電力 W_t は図 19 に示す球面上で微小面積 (R sin θ dφ)(R dθ) 上での電力を積分することにより得られるから、

$$W_t = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P(R, \theta, \phi) (R \sin \theta d\phi) (R d\theta) \dots \dots \dots (91)$$

式(86), (87)を式(90)に適用すると、式(91)は

$$W_t = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{k^2 I^2 l^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{|e^{-jkR}|^2}{R^2} \sin^2 \theta}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \sin \theta d\theta$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 I^2 l^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |I|^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos \theta (\sin^2 \theta + 2)\right]_0^\pi d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |I|^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \dots \dots \dots (92)$$

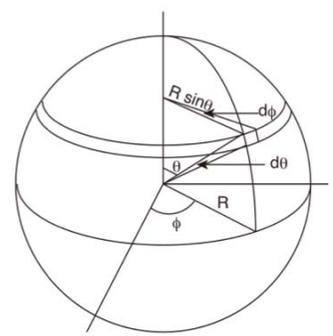


図 19 アンテナを含む球面

この放射現象を送信給電点でみると、給電電流 I が流れることによって、 W_t の電力が放射によって消費される。従って、等価的にある抵抗 R_t が負荷されたことになるから、

$$R_t = \frac{W_t}{|I|^2} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \dots\dots\dots (93)$$

この R_t を放射抵抗と呼ぶ。

以上は送信側に関することであるが、受信側では、受信アンテナ端子にある電圧 V_r が誘導されたとき、負荷に流れる電流 I は任意の負荷インピーダンス Z_l と受信アンテナのインピーダンス Z により

$$I = \frac{V_r}{Z + Z_l} \dots\dots\dots (94)$$

となる。このとき、取り出しうる最大電力は Z_l が Z の複素共役数のときであるから、 Z_l 及び Z の実数部を R_r とすれば、電流 I は

$$I = \frac{V_r}{2R_r} \dots\dots\dots (95)$$

である。取り出し得る受信電力 W_r は、

$$W_r = I^2 R_r = R_r \left| \frac{V_r}{2R_r} \right|^2 = \frac{|V_r|^2}{4R_r} \dots\dots\dots (96)$$

図 20 のような波長に比べて十分短い長さ l のダイポールに θ 方向から入射する電波を考えると受信電圧は

$$V_r = El \sin \theta \dots\dots\dots (97)$$

となる。このアンテナの内部損失はないものとする、アンテナの入力抵抗 R_r は放射抵抗 R_t に等しいと置くことができるから、式(93)と式(97)を式(96)に代入すれば、

$$W_r = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E|^2 \sin^2 \theta \dots\dots\dots (98)$$

微小ダイポールの指向性利得は $G_r = (3/2) \sin^2 \theta$ と計算されているので、式(98)は、

$$W_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} G_r |E|^2 \dots\dots\dots (99)$$

となる。ここで見方を変えて、式(90)の単位面積当たりの電力密度 P の信号が到来し、受信側の断面積 A_r 内に運ばれて受信電力 W_r が得られたとすれば、式(90)と式(99)を使うと、

$$A_r = \frac{W_r}{P} = \frac{\lambda^2 G_r}{4\pi} \dots\dots\dots (100)$$

となる。 A_r をアンテナの実効断面積と呼ぶ。

今、送信アンテナ出力を W_t 、送信アンテナ利得を G_t とすると、距離 R 離れた点の電力密度 P_r は

$$P_r = \frac{W_t G_t}{4\pi R^2} \dots\dots\dots (101)$$

受信アンテナの利得を G_r とすると、式(100)の P を式(101)の P_r で置き換えることにより受信電力 W_r は式(102)で表される。

$$W_r = \frac{\lambda^2 W_t G_t G_r}{(2\pi R)^2} \dots\dots\dots (102)$$

これをフリス (Friis) の伝達公式と呼ぶ。ベル研のフリス (Harald T. Friis) が 1945 年に導いた式である[24]。

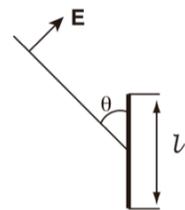


図 20 受信用微小ダイポール

11. おわりに

以上でマクスウェル方程式及び関連の無線関係の数式の誘導を終了することとする。式の誘導で明らかのように、結果だけを見れば簡単なようでもその導出過程は高度な数学的テクニックが用いられており、図2に示したような19世紀に輩出した数学者、科学者の成果をほぼ全部活用している。逆に言えば、このような多くの天才的な才能によってこそ、マクスウェル方程式が出現したことになることに注意する必要がある。我が国が科学技術のイノベーションを目指すならば、何が時代精神で、何がモチベーションになるのか見極め、それを支援する体制を今後作っていくことこそが大切であると思われる。

最近の新聞でも、マクスウェル方程式は、社会に役立つまでに大体100年かかる基礎科学の重要性の例として述べられており[25]、ファラデーの業績に関連しては、今も続く王立研究所の金曜講座の有用性について語られている[26]。

著者にとっては、今まで通り過ぎただけのマクスウェル方程式であったように思うのだが、以上のようにその背景・導出過程を改めて勉強し直してみると、衛星通信をはじめとする通信のどっしりとした基礎が据えられた感じがするのは私のみであろうか。

参考文献

- [1] R.W.Lucky: "Reflections: Is Math Still Relevant?", IEEE Spectrum, p.23, Mar. 2012.
- [2] イアン・スチュアート, 水谷 淳訳: "世界を変えた17の方程式", Softbank, 2013.
- [3] 飯田尚志: "Space Japan Book Review -衛星通信研究者が見た "世界を変えた17の方程式"", Space Japan Review, No.83, June/July/August/September, 2013, <http://satcom.jp/83/spacejapanbookreviewj.pdf>.
- [4] 山本義隆: "磁力と重力の発見 3 近代の始まり", みすず書房, 2003.
- [5] "マイケル・ファラデー", Wikipedia, <http://ja.wikipedia.org/wiki/マイケル・ファラデー>, 2013.
- [6] "遠隔作用・近接作用", <http://hooktail.sub.jp/welcome/enkakuKinsetsu/>, 2013.
- [7] "マクスウェル", weblio 辞書 電気史偉人典, 2013, <http://www.weblio.jp/content/Maxwell,+James+Clerk>.
- [8] 高橋秀俊: "電磁気学", 裳華房, 1960.
- [9] 電気学会通信教育会編: "電気磁気学", 電気学会, 1963.
- [10] "岩波理化学辞典", p.1301, 岩波書店, 1986.
- [11] 電子通信学会編: "電子通信ハンドブック", p.80, オーム社, 1979.
- [12] 広江克彦: "EMAN 電磁気学", 2013, <http://homepage2.nifty.com/eman/electromag/contents.html>
- [13] <http://www.geocities.jp/hiroyuki0620785/innovator/hertz.htm>
- [14] <http://www.geocities.jp/hiroyuki0620785/k3dennjiha/hzexpdenjiha.htm>
- [15] "マルコーニ", weblio 辞書 電気史偉人典, 2013, <http://www.weblio.jp/content/マルコーニ>
- [16] 飯田尚志: "Ka & Broadband Com. Conf.出席及びマルコーニ博物館を訪ねて", Space Japan Review, No.64, Oct./Nov., 2009, <http://satcom.jp/64/conferencereport1j.pdf>
- [17] 虫明康人: "アンテナ・電波伝搬", 電気通信学会大学講座, コロナ社 1964.
- [18] 飯島健一, 中西邦雄: "現代電気工学講座 電気回路 I", オーム社, 1962.
- [19] C.A.Balanis: "Antenna Theory Analysis and Design", John Wiley & Sons, 1997.
- [20] http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations
- [21] <http://en.wikipedia.org/wiki/Heaviside>
- [22] Samuel Silver: "Microwave Antenna Theory and Design", MIT Radlab Series Number 12, McGraw Hill Book Company, 1949.
- [23] J.D.Kraus and R.J.Marhefka: "Antennas for All Applications", McGraw-Hill, 2003.
- [24] H.T. Friis: "A Note On a Simple Transmission Formula", Proc. IRE, vol. 34, p.254, 1946, http://en.wikipedia.org/wiki/Friis_transmission_equation
- [25] "日曜に考える イノベーションどう起こす 創論 中村道治: 卓越した基礎研究カギ 益川敏英: 100年先の成果見据える", 日本経済新聞(朝刊), 2013.8.18.
- [26] 黒田玲子: "あすへの話題 金曜講話", 日本経済新聞(夕刊), 2013.11.27.